INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2,
Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală – 11 februarie 2012

Clasa a X-a - Bareme

1). Pentru ce valori ale lui a, ecuația: $a^x = |x+2| - |2x+8|$ admite o singură soluție?

Selectată de către prof. Bara Lajos din „Cele mai frumoase probleme de matematică” de Dan şi Vlad Sachelarie.

Barem:

Din egalitatea $|x+2| - |2x+8| = a^x$ rezultă $a > 0$ şi $f(x) = |x+2| - |2x+8| > 0$ 1 punct

Inegalitatea implică $|x+2| > |2x+8|$ şi ridicând la pătrat, $5x^2 + 28x + 60 < 0$,

de unde rezultă $-6 < x < -\frac{10}{3}$ 2 puncte

Funcția $f(x)$ definită mai sus, poate fi exprimată deci prin:

$$f(x) = \begin{cases} x+6, -6 < x < -4; \\ -3x - 10, -4 < x < -\frac{10}{3} \end{cases}$$ 1 punct

Reprezentarea grafică a funcției $f(x)$: 1 punct

Pentru ca ecuația să admită o singură soluție este necesar ca graficul funcției $g(x) = a^x$ să treacă prin punctul $M(-4, 2)$. Rezultă $a^{-4} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ 1 punct

Dacă $a > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ecuația admite două soluții, iar dacă $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ecuația nu admite soluții.

1 punct

2).Fie $n \in N^*, a, b \in \Re^*$. Arătați că toate rădăcinile ecuației $(z+a+ib)^n + (z-a+ib)^n = 0$ sunt pur imaginare.

propusă de prof. Liviu Vlaicu

Barem de corectare:

Fie $z_1 = -a - bi, z_2 = a - bi$ şi $M(z_1)$, $M(z_2)$ 1p

Din egalitatea din enunț rezultă $(z - z_1)^n = -(z - z_2)^n$ 2p

Trecând la module obținem $|(z-z_1)|^n = |(z-z_2)|^n$ 1p

Sau $|z-z_1| = |z-z_2|$ 1p

Dacă $M(z)$ avem $MM_1 = MM_2$ 1p

Deci M se află pe mediatoarea segmentului M_1M_2 adică pe axa Oy 1p

3). Rezolvați ecuația $4^x - x\cdot 2^{x+1} - 5\cdot 2^x = 3x^2 - 19x + 6$

propusă de prof. Liviu Vlaicu

barem de corectare:

notând $t = 2^x, t > 0$ ecuația se mai scrie $t^2 - (2x+5)t - 3x^2 + 19x - 6 = 0$ 1p

$\Delta = (4x-7)^2$ 1p

$t_1 = -x+6$ şi $t_1 = 3x-1$ 1p

Din $t_1 = -x+6 \Rightarrow x = 2$ soluție unică 2p

Din $t_1 = 3x-1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$ $f(x) = 2^x$ convexa $g(x) = 3x-1$ liniara 2p

4). Fie $f:\Re \to \Re$, $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$

a) Să se arate că funcția f este bijectivă

b) Dacă g este inversa funcției f să se determine mulțimea $A = \{x \in \Re \mid f(x) = g(x)\}$

selectată de prof. Opriş Adonia din „Teme importante în studiul matematicii”, Grigore Gheba, Eliferie Rogai

barem de corectare:

a)Pentru a demonstra că este f injectivă considerăm $f(x_1) = f(x_2)$ de unde obținem $(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} + \frac{1}{2}\right] = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Deci f este injectivă...*1,5p*

Pentru a demonstra că f este surjectivă fie $y \in \Re$ astfel încât $f(x) = y$. Ecuația cu coeficinți reali $x^3 + \frac{1}{2}x - y = 0$ are grad impar, deci admite cel puțin o rădăcină reală. Aşadar $\forall y \in \Re, \exists x \in \Re$ aî $f(x) = y$ ceea ce înseamnă că f este surjectivă..*1,5p*

Prin urmare f este bijectivă

b) Din $f(x) = g(x) \Rightarrow f(f(x)) = f(g(x))$. Cum g este inversa lui f, avem $f(g(x)) = x$ *1p*

Obținem astfel $f(f(x)) = x \Rightarrow \left(x^3 + \frac{1}{2}x\right)^3 + \frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{1}{2}x\right) = x$

Se observă că o soluție a acestei ecuații este $x = 0$. Rămâne să rezolvăm ecuația

$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left[x^2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] = 1$ *1p*

Cu notația $y = x^2 + \frac{1}{2}$ ecuația de mai sus devine $(y^2 - 1)(2y^2 - y + 2) = 0$ *1p*

Singura rădăcină a ecuației în y care ne conduce la valori reale pentru x este $y = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Deci $A = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ *1p*

NOTĂ:
Pentru orice altă soluție corectă se acorda punctajul maxim aferent problemei.